El teorema de Albert en geometría policosimpléctica

Eduardo García-Toraño Andrés
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

(Trabajo conjunto con Tom Mestdag, UAntwerpen)

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca, 7 – Junio – 2023

Geometría cosimpléctica

Una variedad co-simpléctica es (M, ω, η) con M variedad de dimensión $2n+1$, ω 2-forma cerrada, η 1-forma cerrada y $\omega^n \wedge \eta$ forma de volumen. Campos:

- Campo de Reeb $\mathbf{R}$: satisface $i_{\mathbf{R}}\omega = 0$ y $i_{\mathbf{R}}\eta = 1$
- Campo de Evolución (dado $H\colon M \to \mathbb{R}$): $i_{E_H}\omega = dH - \mathbf{R}(H)\eta, \quad i_{E_H}\eta = 1$

%pause Localmente (Darboux):

$$\omega = dq^i \wedge dp_i, \qquad \eta = dt, \qquad (\mathbf{R} = \partial/\partial_t)$$

de manera que

$$E_H = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\left\{ \text{ Curvas integrales } E_H \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dot{t} = 1 \\ \dot{q}^i = \partial H/\partial p_i \\ \dot{p}_i = -\partial H/\partial q^i \end{array} \right\}$$

El teorema de Albert

$\Phi_g\colon M \to M$ acción (libre, propia) de un grupo de G en (M, ω, η). Se dice Hamiltoniana si:

$$\Phi_g^*\omega = \omega, \qquad i_{\xi_M}\eta = 0,$$

y admite una aplicación momento $J\colon M \to \mathfrak{g}^*$ (equivariante):

$$M_\mu \equiv J^{-1}(\mu)/G_\mu \xleftarrow{\pi_\mu} J^{-1}(\mu) \xrightarrow{j_\mu} M$$

%pause **Teorema:** *Sea (M, ω, η) cosimpléctica, y Φ_g una acción canónica de G con momento J. Si $\mu \in \mathfrak{g}^*$ es un valor regular de J, entonces*

$$M_\mu \equiv J^{-1}(\mu)/G_\mu$$

es una variedad cosimpléctica y su estructura cosimpléctica reducida (ω_μ, η_μ) está unívocamente determinada por las relaciones:

$$\pi_\mu^*\omega_\mu^a = j_\mu^*\omega^a, \qquad \pi_\mu^*\eta_\mu^a = j_\mu^*\eta^a.$$

Dado un Hamiltoniano invariante, los campos de evolución están π-relacionados.

Estructuras policosimplécticas

Definición: *Una estructura k-policosimpléctica en M es una familia de 2-formas cerradas $\omega^1, \ldots, \omega^k$ y 1-formas cerradas $\eta^1, \ldots, \eta^k$ tales que:*

1. $\eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \neq 0$,
2. $\ker \omega^1 \cap \cdots \cap \ker \omega^k \cap \ker \eta^1 \cap \cdots \cap \ker \eta^k = \{0\}$,
3. $\dim\{\ker \omega^1 \cap \cdots \cap \ker \omega^k\} = k$.

Se dice estándar si localmente: $\omega^a = dq^i \wedge dp_i^a, \eta^a = dt^a$, i.e.

$$\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^* Q \equiv \mathbb{R}^k \times (T^* Q \oplus \cdots \oplus T^* Q)$$

%pause Dinámica: dado $H \colon M \to \mathbb{R}$ su buscan campos $X_1, \ldots, X_k$, tales que:

$$\eta^a(X_b) = \delta_b^a, \qquad \sum_{a=1}^{k} i_{X_a} \omega^a = dH - \sum_{a=1}^{k} R_a(H)\, \eta^a.$$

Si $[X_a, X_b] = 0$, en coordenadas estándard las secciones integrales verifican:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q^i}\right|_{\varphi(t)} = -\sum_{a=1}^{k} \left.\frac{\partial \psi_i^a}{\partial t^a}\right|_t, \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial p_i^a}\right|_{\varphi(t)} = \left.\frac{\partial \psi^i}{\partial t^a}\right|_t.$$

Sea (V, ω^a, η^a) un e.v. policosimpléctico. Dado $S \subset V$, definimos

$$S^{c\omega} = \{v \in V \mid \omega^1(v, S) = \cdots = \omega^k(v, S) = 0\} \subset V.$$

Llamemos $\mathcal{R} = \{\ker \omega^1 \cap \cdots \cap \ker \omega^k\} \subset V$. Algunas propiedades:

$$\mathcal{R} \subset S^{c\omega}, \qquad S \subset S^{c\omega\, c\omega}.$$

%pause

Proposición: *Sea (V, ω^a, η^a) un e.v. policosimpléctico y $S \subset V$ un subespacio tal que $\mathcal{R} \cap S = \{0\}$. Entonces:*

1. *Las 2-formas ω^a y las 1-formas η^a inducen 2-formas ω^a_S y 1-formas η^a_S en el cociente $S^{c\omega}/(S \cap S^{c\omega})$*

$$\omega^a_S([v], [w]) = \omega^a(v, w), \qquad \eta^a_S([v]) = \eta^a(v).$$

2. *$(S^{c\omega}/(S \cap S^{c\omega}), \omega^a_S, \eta^a_S)$ es un e.v. policosimpléctico si, y sólo si,*

$$\mathcal{R} \oplus (S \cap S^{c\omega}) = S^{c\omega} \cap S^{c\omega\, c\omega}.$$

Reducción de variedades policosimplécticas (I)

Ingredientes:

- Variedad policosimpléctica (M, ω^a, η^a).
- Acción policosimpléctica: $\Phi_g^* \omega^a = \omega^a, i_{\xi_M} \eta^a = 0$.
- Aplicación momento $J = (J^1, \dots, J^k) \colon M \to (\mathfrak{g}^*)^k$ (equivariante) tal que

$$i_{\xi_M} \omega^a = dJ^a_\xi,$$

donde $J^a_\xi \colon M \to \mathbb{R}$ es la función en M $J^a_\xi(x) = \langle J^a(x), \xi \rangle$.

Fijamos $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in (\mathfrak{g}^*)^k$. G_μ actúa en $J^{-1}(\mu)$. Se sigue:

$$J^{-1}(\mu) = \{x \in M \mid J^a(x) = \mu_a, \;\; a = 1, \dots, k\} \Rightarrow T_x J^{-1}(\mu) = \tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega},$$

y

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\mu\big|_x = \tilde{\mathfrak{g}}_x \cap \tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega}.$$

Reducción de variedades policosimplécticas (II)

Teorema: *En la situación anterior, la variedad* $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ *es polisimpléctica con* $(\omega^a_\mu, \eta^a_\mu)$ *unívocamente dadas mediante:*

$$\pi^*_\mu \omega^a_\mu = j^*_\mu \omega^a, \qquad \pi^*_\mu \eta^a_\mu = j^*_\mu \eta^a,$$

si, y sólo si, para cada $x \in J^{-1}(\mu)$ *se tiene:*

$$\mathcal{R}_x \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_\mu|_x = \tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega} \cap \tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega\, c\omega}.$$

%pause

Demostración

Tenemos $\tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega} \cap \tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega\, c\omega} = \mathcal{R}_x \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_\mu|_x = \mathcal{R}_x \oplus (\tilde{\mathfrak{g}}_x \cap \tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega})$.

Para $S = \tilde{\mathfrak{g}}_x$ encontramos una estructura policosimpléctica en:

$$\tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega}/(\tilde{\mathfrak{g}}_x \cap \tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega}) = \tilde{\mathfrak{g}}_x^{c\omega}/\, \tilde{\mathfrak{g}}_\mu|_x = T_x J^{-1}(\mu)/\, \tilde{\mathfrak{g}}_\mu|_x \simeq T_{[x]}(J^{-1}(\mu)/G_\mu).$$

□

Reducción de variedades policosimplécticas (III)

Recordemos la versión geométrica de las ecs. de Hamilton en teoría de campos:

$$\eta^a(X_b) = \delta^a_b, \qquad \sum_{a=1}^k i_{X_a}\omega^a = dH - \sum_{a=1}^k R_a(H)\,\eta^a. \qquad (\star)$$

DIferencias con mecánica:

- Una solución $\boldsymbol{X}$ no es invariante en general.
- El teorema de Noether dice:

$$\sum_a \mathcal{L}_{X_a} J^a_\xi = 0 \sim \text{(divergencia)}$$

Necesitamos que $X_a(J^b_\xi)$ se anulen por separado.

%pause **Teorema:** *(En la situación del teorema anterior.) Sea $H\colon M \to \mathbb{R}$ un Hamiltoniano G-invariante y $\boldsymbol{X}$ una solución a $(\star)$ que sea tangente a $J^{-1}(\mu)$ e invariante. Entonces la proyección $\overline{\boldsymbol{X}}_\mu$ en M_μ es una solución de $(\star)$ para el Hamiltoniano reducido h_μ.*

Muchas gracias